

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Demonstrați că: $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2}$, oricare ar fi n număr natural.

b) (4p) Arătați că:

$$(\sqrt{1 \cdot 2} - 1)(\sqrt{2 \cdot 3} - 2)(\sqrt{3 \cdot 4} - 3) \dots (\sqrt{2015 \cdot 2016} - 2015) < \frac{1}{2^{2015}}.$$

Prof. Dorel Ispășoiu, Gura Humorului

Soluție: a) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}$.

Prin ridicare la pătrat: $n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4}$, ceea ce este adevărat, oricare ar fi n număr natural.

b) Aplicând inegalitatea $\sqrt{n(n+1)} - n < \frac{1}{2}$ de la punctul a) avem: $\sqrt{1 \cdot 2} - 1 < \frac{1}{2}$; $\sqrt{2 \cdot 3} - 2 < \frac{1}{2}$; $\sqrt{3 \cdot 4} - 3 < \frac{1}{2}$; ...; $\sqrt{2015 \cdot 2016} - 2015 < \frac{1}{2}$. Înmulțind cele 2015 inegalități de mai sus obținem:

$$(\sqrt{1 \cdot 2} - 1)(\sqrt{2 \cdot 3} - 2)(\sqrt{3 \cdot 4} - 3) \dots (\sqrt{2015 \cdot 2016} - 2015) < \frac{1}{2^{2015}}.$$

Barem:

a) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}$	1p
Prin ridicare la patrat: $n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4}$, ceea ce este adevărat, oricare ar fi n număr natural.	2p
b) Aplic inegalitatea $\sqrt{n(n+1)} - n < \frac{1}{2}$ de la punctul a)	1p
$\sqrt{1 \cdot 2} - 1 < \frac{1}{2}$; $\sqrt{2 \cdot 3} - 2 < \frac{1}{2}$; $\sqrt{3 \cdot 4} - 3 < \frac{1}{2}$; ...; $\sqrt{2015 \cdot 2016} - 2015 < \frac{1}{2}$.	2p
Înmulțind cele 2015 inegalități de mai sus obținem: $(\sqrt{1 \cdot 2} - 1)(\sqrt{2 \cdot 3} - 2)(\sqrt{3 \cdot 4} - 3) \dots (\sqrt{2015 \cdot 2016} - 2015) < \frac{1}{2^{2015}}.$	1p

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^2 + 2[x] \cdot \{x\} = 3(3 - \{x\}^2)$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x , iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .

Prof. Tamara Brutaru, Suceava

Soluție. Cum $\{x\} = x - [x]$, notând $[x] = k, k \in \mathbb{Z}$, ecuația devine: $x^2 + 2k(x - k) + 3(x - k)^2 = 9$.

Efectuând calculele obținem: $4x^2 - 4xk + k^2 = 9 \Leftrightarrow (2x - k)^2 = 9$. Rezultă $2x - k = -3$ sau $2x - k = 3$.

Cum $2x - k = 2x - [x] = 2([x] + \{x\}) - [x] = [x] + 2\{x\}$, avem: $[x] + 2\{x\} = -3$ sau $[x] + 2\{x\} = 3$.

Din $[x] + 2\{x\} = -3$ și $[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} \in \{0; 0,5\} \Rightarrow x \in \{-3; -3,5\}$, iar din $[x] + 2\{x\} = 3$ și $[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} \in \{0; 0,5\} \Rightarrow x \in \{3; 2,5\}$

Barem.

$\{x\} = x - [x]$, oricare ar fi numărul real x .	1p
Notând $[x] = k, k \in \mathbb{Z}$, ecuația devine: $x^2 + 2k(x - k) + 3(x - k)^2 = 9$.	1p
Efectuând calculele obținem: $4x^2 - 4xk + k^2 = 9 \Leftrightarrow (2x - k)^2 = 9$.	1p
Rezultă $2x - k = -3$ sau $2x - k = 3$.	1p
Cum $2x - k = 2x - [x] = 2([x] + \{x\}) - [x] = [x] + 2\{x\}$, avem: $[x] + 2\{x\} = -3$ sau $[x] + 2\{x\} = 3$.	1p
$[x] + 2\{x\} = -3$ și $[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} \in \{0; 0,5\} \Rightarrow x \in \{-3; -3,5\}$	1p
$[x] + 2\{x\} = 3$ și $[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} \in \{0; 0,5\} \Rightarrow x \in \{3; 2,5\}$	1p

3. Fie punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât $AC=AD=BC=BD$, E mijlocul lui (AB) , iar F mijlocul lui (CD) .

a) Aflați măsura unghiului dintre dreptele AB și CD ;

b) Dacă $AA' \perp (BCD)$, demonstrați că punctele B, A', F sunt coliniare;

c) Dacă G este piciorul perpendicularei din A pe bisectoarea $\sphericalangle ACD$, demonstrați că EG este paralelă cu planul (BCD) .

prof. Larionescu Corina, Suceava

Soluție. a) În $\triangle ACD$ isoscel, (AF) este mediană $\Rightarrow AF \perp CD$ (1). În $\triangle BCD$ isoscel, (BF) este mediană $\Rightarrow BF \perp CD$ (2). Din (1), (2) și $AF \cap BF = \{F\} \Rightarrow CD \perp (ABF)$. Cum $AB \subset (ABF)$, avem $CD \perp AB \Rightarrow$ măsura unghiului dintre dreptele AB și CD este 90° .

b) Cum $AA' \perp (BCD)$ și $AF \perp CD$, $CD, A'F \subset (BCD)$, conform reciprocei 1 a teoremei celor trei perpendiculare rezultă $A'F \perp CD$. Dar $BF \perp CD$, deci B, A', F sunt coliniare.

c) Fie $AG \cap CD = \{I\}$. În $\triangle ACI$, (CG) este bisectoare, (CG) este înălțime, deci $\triangle ACI$ este isoscel, rezultă G este mijlocul (AI) . Cum E este mijlocul (AB) și G este mijlocul (AI) , avem (EG) linie mijlocie în $\triangle ABI$, rezultă $EG \parallel BI$. Din $EG \parallel BI, BI \subset (BCD) \Rightarrow EG \parallel (BCD)$.

Barem.

a) În ΔACD isoscel, (AF) este mediană $\Rightarrow AF \perp CD(1)$. În ΔBCD isoscel, (BF) este mediană $\Rightarrow BF \perp CD(2)$	1p
Din (1), (2) și $AF \cap BF = \{F\} \Rightarrow CD \perp (ABF)$. Cum $AB \subset (ABF)$, avem $CD \perp AB \Rightarrow$ măsura unghiului dintre dreptele AB și CD este 90° .	1p
b) Cum $AA' \perp (BCD)$ și $AF \perp CD$, $CD, A'F \subset (BCD)$, conform reciprocei 1 a teoremei celor trei perpendiculare rezultă $A'F \perp CD$.	1p
Dar $BF \perp CD$, deci B, A', F sunt coliniare	1p
c) Fie $AG \cap CD = \{I\}$. În ΔACI , (CG) este bisectoare, (CG) este înălțime, deci ΔACI este isoscel, rezultă G este mijlocul (AI) .	1p
Cum E este mijlocul (AB) și G este mijlocul (AI) , avem (EG) linie mijlocie în ΔABI , rezultă $EG \parallel BI$.	1p
$EG \parallel BI, BI \subset (BCD) \Rightarrow EG \parallel (BCD)$.	1p

4. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$ și $P, Q \in (VO)$. Dacă $\{E\} = AP \cap CV$, $\{F\} = CP \cap AV$, $\{S\} = BQ \cap DV$ și $\{T\} = DQ \cap BV$, arătați că măsura unghiului dintre dreptele EF și ST nu depinde de alegerea punctelor P și Q pe segmentul (VO) .

Gazeta Matematică Nr.11/2014

Soluție. Cum $ABCD$ pătrat, $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow AO=OC$ (1), $BO=OD$ (2), $AC \perp BD$ (3). În ΔVAC , $AE \cap CF \cap VO = \{P\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VE}{EC} \cdot \frac{CO}{OA} \cdot \frac{AF}{FV} = 1$, iar din (1) obținem: $\frac{VE}{EC} = \frac{FV}{AF}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $FE \parallel AC$. Analog, în ΔVDB , $DS \cap DT \cap VO = \{PQ\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VT}{TB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{SD}{VS} = 1$, iar din (2) obținem: $\frac{VT}{TB} = \frac{VS}{SD}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $ST \parallel DB$. Cum $FE \parallel AC$, $ST \parallel DB$, $AC \perp BD \Rightarrow EF \perp ST \Rightarrow m(\sphericalangle EF, ST) = 90^\circ$, deci nu depinde de alegerea $P, Q \in (VO)$.

Barem:

Cum $ABCD$ pătrat, $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow AO=OC$ (1), $BO=OD$ (2), $AC \perp BD$ (3).	1p
În ΔVAC , $AE \cap CF \cap VO = \{P\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VE}{EC} \cdot \frac{CO}{OA} \cdot \frac{AF}{FV} = 1$.	2p
Din (1) obținem: $\frac{VE}{EC} = \frac{FV}{AF}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $FE \parallel AC$.	1p
Analog, în ΔVDB , $DS \cap DT \cap VO = \{PQ\}$, aplicând teorema lui Ceva avem: $\frac{VT}{TB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{SD}{VS} = 1$, iar din (2) obținem: $\frac{VT}{TB} = \frac{VS}{SD}$ și conform teoremei lui Thales rezultă $ST \parallel DB$.	2p
Cum $FE \parallel AC$, $ST \parallel DB$, $AC \perp BD \Rightarrow EF \perp ST \Rightarrow m(\sphericalangle EF, ST) = 90^\circ$, deci nu depinde de alegerea $P, Q \in (VO)$.	1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.